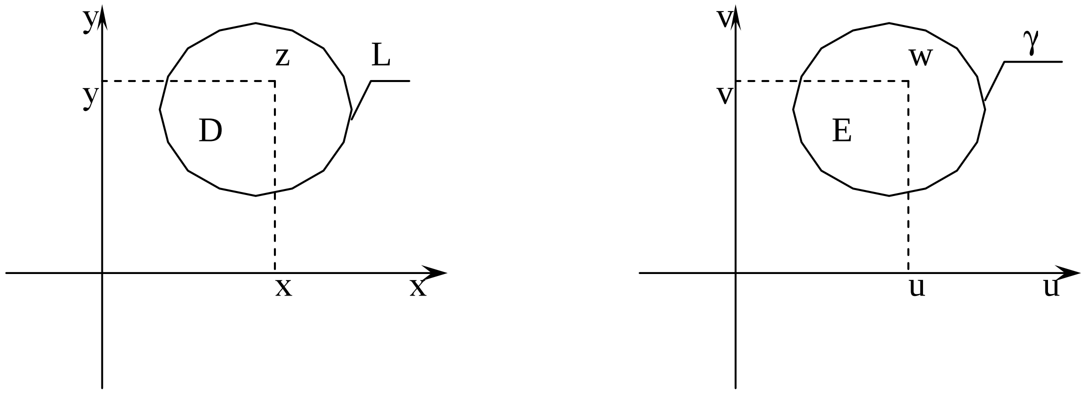
Лекция 2

Функции комплексного переменного

Рассмотрим две области:



Пусть известен закон, позволяющий по известным координатам некоторой точки из области *D* получить координаты точки в области *E*. Если такой закон известен, то говорят, что задано отображение области *D* на область *E*. Если каждой точке из области *D* соответствует только одна точка в области *E*, то отображение называется однозначным, в противном случае – многозначным. Функция, осуществляющая однозначное отображение, называется однозначной функцией.

Закон отображения имеет вид:

$(1) - \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ отображение D на E

$(2) - \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ отображение E на D

Если отображения 1 и 2 – однозначны, то отображение называется взаимно однозначным.

Построим комплексную функцию

$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y);$

Перейдем к аргументам $z, \overline{z}$

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

Отсюда $w = u(z, \overline{z}) + iv(z, \overline{z});$ $\quad w = w(z, \overline{z})$

Таким образом, в общем случае функция w является функцией двух комплексных переменных. Будем рассматривать частный случай, когда $w=w(z)$. *Такие функции – функции <u>одной</u> комплексной переменной - называются функциями комплексной переменной (функциями комплексного переменного).* Если не оговорено противное, предполагается, что эти функции однозначные. Отображения, осуществляемые функциями комплексной переменной, называются *конформными отображениями*[1].

[1] Смысл названия разъясняется ниже.

Предел функции комплексного переменного

Пределом функции f(z) при $z \to z_0$ называется комплексное число c, такое, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$*, для которого при* $|z - z_0| < \delta$ *будет выполняться* $|f(z) - c| < \varepsilon$*:*

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$. При этом путь, по которому $z \to z_0$, - *любой*. Предел может быть конечным числом, бесконечностью и не существовать.

Если $f(z) = u + iv$ то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} u + i \lim\limits_{z \to z_0} v$.

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует, если существуют $\lim\limits_{z \to z_0} u$ и $\lim\limits_{z \to z_0} v$.

Все теоремы о пределах для функций двух действительных переменных справедливы и для функции комплексной переменной.

Непрерывность в точке

Функция f(z) определена в точке z_0*, если в этой точке определены действительная и мнимая части этой функции.*

Пусть в точке z_0 и некоторой ее окрестности функция f(*z)* определена. Функция f(z) непрерывна в точке z_0, если выполняется равенство: $\lim\limits_{z \to z_0} \mathrm{f}(z) = \mathrm{f}(z_0)$.

Если функция непрерывна во всех точках области D, то она называется непрерывной в области D.

Дифференцирование функций комплексной переменной

Производная функции комплексной переменной определяется следующим образом:

$$w = f(z)$$

$$w' = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$w = u + iv, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} v = v(x, y) \\ u = u(x, y) \end{array}$$

Будем считать, что функции u и v *регулярны* в области D: непрерывны и имеют непрерывные частные производные по аргументам x и y. Установим ограничения на функции u и v, которые должны выполняться, чтобы можно было дифференцировать функцию w по аргументу z. Функция w должна быть функцией только одного комплексного аргумента - z. Выше было показано, что комплексная функция, построенная из двух функций двух действительных переменных

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

при переходе к комплексным аргументам записывается в виде $w = f(z, \bar{z})$. Чтобы выполнялось соотношение $w = f(z)$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$$

Получим

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u+iv) = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Полученные равенства называются *условиями Коши-Римана*.
Предположим теперь, что функции u, v дважды дифференцируемы в области D.
Исключим v из соотношений Коши-Римана:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

складывая их, получим уравнение Лапласа: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Исключим теперь u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

вычитая их, получим уравнение Лапласа: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

Таким образом, функции u, v удовлетворяют уравнению Лапласа и, следовательно, они являются гармоническими функциями.